Calculs de vitesses par la définition

Exercice 1: Eolienne

Vitesse du bout de pâle

Question 1: Exprimer le vecteur position par rapport au repère 0 de l'extrémité de la pâle D en fonction de H, R et L.

A étant fixe dans la base 0, on a :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{AD} = H\overrightarrow{z_0} + R\overrightarrow{x_1} + L\overrightarrow{y_2}$$

Question 2: Exprimer les 3 vecteurs rotation $\overrightarrow{\Omega_{10}}$, $\overrightarrow{\Omega_{21}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{20}}$

Cette notion sera abordée au prochain cours

$$\overrightarrow{\Omega_{10}} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{\Omega_{21}} = \dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{x_1}$$
$$\overrightarrow{\Omega_{20}} = \overrightarrow{\Omega_{21}} + \overrightarrow{\Omega_{10}} = \dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0}$$

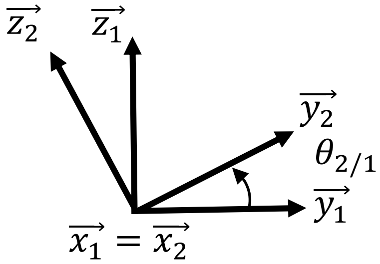
Question 3: Calculer la vitesse de l'extrémité D de la pâle $\vec{V}(D/0)$ à l'aide de la définition du vecteur vitesse en fonction de R, L, $\dot{\theta}_{1/0}$, $\dot{\theta}_{2/1}$, θ_{21} et des vecteurs de base.

$$\vec{V}(D/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0$$
$$\vec{V}(D/0) = \left.\frac{dH\overrightarrow{z_0}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{dR\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{dL\overrightarrow{y_2}}{dt}\right)_0$$
$$\vec{V}(D/0) = R\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + L\left.\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right)_0$$
$$\vec{V}(D/0) = R\overrightarrow{\Omega_{10}} \wedge \overrightarrow{x_1} + L\overrightarrow{\Omega_{20}} \wedge \overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{V}(D/0) = R\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_1} + L\left(\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{x_1} + \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0}\right) \wedge \overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{V}(D/0) = R\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_1} + L\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2} + L\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{V}(D/0) = R\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} + L\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2} + L\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{pmatrix}0\\\cos\theta_{21}\\\sin\theta_{21}\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1} = \begin{pmatrix}-\cos\theta_{21}\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1} = -\cos\theta_{21}\,\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{V}(D/0) = R\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} + L\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2} - L\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\,\overrightarrow{x_1}$$

Question 4: Exprimer ce vecteur vitesse dans la base 1.



$$\overrightarrow{z_1} = -\sin\theta_{2/1}\overrightarrow{y_1} + \cos\theta_{2/1}\overrightarrow{z_1}$$
$$\vec{V}(D/0) = R\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} + L\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2} - L\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\overrightarrow{x_1}$$
$$\vec{V}(D/0) = R\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} + L\dot{\theta}_{2/1}\left(-\sin\theta_{2/1}\overrightarrow{y_1} + \cos\theta_{2/1}\overrightarrow{z_1}\right) - L\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\overrightarrow{x_1}$$
$$\vec{V}(D/0) = \left(-L\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\right)\overrightarrow{x_1} + \left(R\dot{\theta}_{1/0} - L\dot{\theta}_{2/1}\sin\theta_{2/1}\right)\overrightarrow{y_1} + L\dot{\theta}_{2/1}\cos\theta_{2/1}\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{V}(D/0) = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21} \\ R\dot{\theta}_{1/0} - L\dot{\theta}_{2/1}\sin\theta_{2/1} \\ L\dot{\theta}_{2/1}\cos\theta_{2/1} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}_1}$$

Question 5: En déduire l'expression littérale de la norme de cette vitesse V_D.

$$V_D = \left\|\vec{V}(D/0)\right\| = \sqrt{\left(L\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\right)^2 + \left(R\dot{\theta}_{1/0} - L\dot{\theta}_{2/1}\sin\theta_{2/1}\right)^2 + \left(L\dot{\theta}_{2/1}\cos\theta_{2/1}\right)^2}$$
$$V_D = \left\|\vec{V}(D/0)\right\| = \sqrt{(L\cos\theta_{21})^2\left(\dot{\theta}_{1/0}{}^2 + \dot{\theta}_{2/1}{}^2\right) + \left(R\dot{\theta}_{1/0} - L\dot{\theta}_{2/1}\sin\theta_{2/1}\right)^2}$$

Vérification sur des cas particuliers

Question 6: Déterminer V_D si $\dot{\theta}_{1/0} = 0$ et commenter.

$$V_D = \sqrt{(L\cos\theta_{21})^2\left(\dot{\theta}_{2/1}{}^2\right) + \left(-L\dot{\theta}_{2/1}\sin\theta_{2/1}\right)^2}$$
$$V_D = L\dot{\theta}_{2/1}\sqrt{(\cos\theta_{21})^2 + \left(\sin\theta_{2/1}\right)^2} = L\dot{\theta}_{2/1}$$

Ce résultat est logique, il vaut « RΩ » et est constant

Question 7: Déterminer la position dans laquelle V_D est maximale si $\dot{\theta}_{2/1} = 0$ et commenter.

$$V_D = \sqrt{(L\cos\theta_{21})^2\left(\dot{\theta}_{1/0}{}^2\right) + \left(R\dot{\theta}_{1/0}\right)^2}$$
$$V_D = \dot{\theta}_{1/0}\sqrt{(L\cos\theta_{21})^2 + R^2}$$

Maximum lorsque $\cos\theta_{21} = 1$ et vaut « RΩ », la droite CD étant parallèle à l'axe de rotation, tous ses points vont à la même vitesse

$$\theta_{21} = 0[\pi]$$

L'hélice est horizontale, le point D est au plus loin de l'axe de rotation, c'est normal.

D'après Pythagore, $\sqrt{(L\cos\theta_{21})^2 + R^2}$ est la distance du point D à l'axe de rotation, on a aussi « RΩ », R étant cette distance

Vitesse maximale et position de l'hélice associée

Question 8: Montrer que les extrema de la vitesse V_D sont obtenues pour la condition $(Lk_1 \sin u + Rk_2) \cos u = 0$

$$u = \theta_{2/1}$$

$$V_D = \sqrt{(L\cos u)^2\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) + (Rk_1 - Lk_2 \sin u)^2}$$

$$\frac{dV_D}{du} = 0$$

$$\frac{\left((L\cos u)^2\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) + (Rk_1 - Lk_2 \sin u)^2\right)'}{2\sqrt{(L\cos u)^2\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) + (Rk_1 - Lk_2 \sin u)^2}} = 0$$

$$\left((L\cos u)^2\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) + (Rk_1 - Lk_2 \sin u)^2\right)' = 0$$

$$2L^2(\cos u)' \cos u \left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) + 2(Rk_1 - Lk_2 \sin u)'(Rk_1 - Lk_2 \sin u) = 0$$

$$-2L^2 \sin u \cos u \left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) - 2Lk_2(\sin u)'(Rk_1 - Lk_2 \sin u) = 0$$

$$-2L^2 \sin u \cos u \left({k_1}^2 + {k_2}^2\right) - 2Lk_2 \cos u \,(Rk_1 - Lk_2 \sin u) = 0$$

$$-2L^2{k_1}^2 \sin u \cos u - 2L^2{k_2}^2 \sin u \cos u - 2LRk_1k_2 \cos u + 2L^2{k_2}^2 \cos u \sin u = 0$$

$$-2L^2{k_1}^2 \sin u \cos u - 2LRk_1k_2 \cos u = 0$$

$$(Lk_1 \sin u + Rk_2) \cos u = 0$$

Question 9: En déduire le nombre d'extrema existant en fonction du rapport $\frac{R\,k_2}{L\,k_1}$

$$(Lk_1 \sin u + Rk_2)\cos u = 0$$

$$\begin{cases} \cos u = 0 \\ Lk_1 \sin u + Rk_2 = 0 \; si \; \frac{R\,k_2}{L\,k_1} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos u = 0 \\ \sin u = -\frac{R\,k_2}{L\,k_1} = k \; si \; \frac{R\,k_2}{L\,k_1} \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{R\,k_2}{L\,k_1} \leq 1 \rightarrow 4 \; extrema$$
$$\frac{R\,k_2}{L\,k_1} > 1 \rightarrow 2 \; extrema$$

Question 10: Déterminer les 2 ou 4 expressions de u donnant les extrema de V_D en fonction du rapport $\frac{R\,k_2}{L\,k_1}$

<table>
<tr><td>$\cos u = 0$</td><td colspan="2">$\sin u = -\frac{R\,k_2}{L\,k_1}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Deux extrema toujours présents

$u = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$</td><td colspan="2">On remarque que cette solution n'est pas toujours possible</td></tr>
<tr><td>$\frac{R\,k_2}{L\,k_1} > 1$

Pas d'autres extrema</td><td>$\frac{R\,k_2}{L\,k_1} \leq 1$
On a deux autres extrema

$u = \begin{cases} \sin^{-1}\left(-\frac{R\,k_2}{L\,k_1}\right)[2\pi] \\ \pi - \sin^{-1}\left(-\frac{R\,k_2}{L\,k_1}\right)[2\pi] \end{cases}$</td></tr>
</table>

Question 11: Déterminer les valeurs extrêmes de V_D pour ces différentes positions et établir leur hiérarchie

$$V_D = \sqrt{(L\cos u)^2({k_1}^2 + {k_2}^2) + (Rk_1 - Lk_2 \sin u)^2}$$

$u = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$	$V_D = \sqrt{(Rk_1 + Lk_2)^2} = \boldsymbol{\lvert Rk_1 + Lk_2 \rvert}$
$u = \frac{\pi}{2}[2\pi]$	$V_D = \sqrt{(Rk_1 - Lk_2)^2} = \boldsymbol{\lvert Rk_1 - Lk_2 \rvert}$
$u = \sin^{-1}\left(-\frac{R\,k_2}{L\,k_1}\right)[2\pi]$	$V_D = \sqrt{(L\cos u)^2({k_1}^2 + {k_2}^2) + \left(Rk_1 + Lk_2\frac{R\,k_2}{L\,k_1}\right)^2}$ $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u = 1 - \frac{R^2{k_2}^2}{L^2{k_1}^2} = \frac{L^2{k_1}^2 - R^2{k_2}^2}{L^2{k_1}^2}$

	$V_D = \sqrt{L^2 \frac{L^2 {k_1}^2 - R^2 {k_2}^2}{L^2 {k_1}^2}({k_1}^2 + {k_2}^2) + \left(R k_1 + L k_2 \frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1}\right)^2}$ $V_D = \sqrt{\frac{L^2 {k_1}^2 - R^2 {k_2}^2}{{k_1}^2}({k_1}^2 + {k_2}^2) + \frac{R^2}{{k_1}^2}({k_1}^2 + {k_2}^2)^2}$ $V_D = \frac{1}{k_1}\sqrt{(L^2 {k_1}^2 - R^2 {k_2}^2)({k_1}^2 + {k_2}^2) + R^2({k_1}^2 + {k_2}^2)^2}$ $V_D = \frac{1}{k_1}\sqrt{({k_1}^2 + {k_2}^2)(L^2 {k_1}^2 - R^2 {k_2}^2 + R^2 {k_1}^2 + R^2 {k_2}^2)}$ $V_D = \frac{1}{k_1}\sqrt{({k_1}^2 + {k_2}^2)(L^2 {k_1}^2 + R^2 {k_1}^2)}$ $\boldsymbol{V_D = \sqrt{({k_1}^2 + {k_2}^2)(L^2 + R^2)}}$
$u = \pi - \sin^{-1}\left(-\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1}\right)$	$\cos^2\left[\pi - \sin^{-1}\left(-\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1}\right)\right] = \cos^2\left[\sin^{-1}\left(-\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1}\right)\right]$ On a donc la même vitesse dans les 2 cas

Dans le cas de 4 extrema, étudions lesquels sont les maxima et lesquels sont les minima

$$
\begin{aligned}
{V_D}^1 &= \sqrt{(Rk_1 + Lk_2)^2} = \sqrt{(Rk_1)^2 + (Lk_2)^2 + 2Rk_1Lk_2} \\
{V_D}^2 &= \sqrt{(Rk_1 - Lk_2)^2} = \sqrt{(Rk_1)^2 + (Lk_2)^2 - 2Rk_1Lk_2} \\
{V_D}^{34} &= \sqrt{({k_1}^2 + {k_2}^2)(L^2 + R^2)} = \sqrt{(Rk_1)^2 + (Lk_2)^2 + (Lk_1)^2 + (Rk_2)^2}
\end{aligned}
$$

On a déjà :

$$\boldsymbol{|Rk_1 - Lk_2| < |Rk_1 + Lk_2|}$$
$${V_D}^2 < {V_D}^1$$

De plus :

$$(Lk_1 - Rk_2)^2 = (Lk_1)^2 - 2Rk_1Lk_2 + (Rk_2)^2$$
$$2Rk_1Lk_2 = (Lk_1)^2 + (Rk_2)^2 - (Lk_1 - Rk_2)^2$$

$$
\begin{aligned}
{V_D}^1 &= \sqrt{(Rk_1)^2 + (Lk_2)^2 + (Lk_1)^2 + (Rk_2)^2 - (Lk_1 - Rk_2)^2} \\
&< \sqrt{(Rk_1)^2 + (Lk_2)^2 + (Lk_1)^2 + (Rk_2)^2}
\end{aligned}
$$

Donc :

$${V_D}^2 < {V_D}^1 < {V_D}^{34}$$

${V_D}^1$ et ${V_D}^2$ sont donc des minima et ${V_D}^{34}$ des maximums

Au bilan :

Soit il y a 2 extrema si $\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1} > 1$	Soit il y a 4 extrema si $\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1} \leq 1$ Dont 2 identiques
$V_D{}^{max} = \boldsymbol{\lvert Rk_1 + Lk_2 \rvert}$ $V_D{}^{min} = \boldsymbol{\lvert Rk_1 - Lk_2 \rvert}$	$V_D{}^{min} = \boldsymbol{\lvert Rk_1 + Lk_2 \rvert}$ $V_D{}^{min} = \boldsymbol{\lvert Rk_1 - Lk_2 \rvert}$ $\boldsymbol{V_D{}^{max} = \sqrt{\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right)(L^2 + R^2)}}$

Question 12: En déduire, selon le rapport $\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1}$, la valeur maximale $V_D{}^{max}$

$\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1} > 1$	$\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1} \leq 1$
$V_D{}^{max} = Rk_1 + Lk_2$	$V_D{}^{max} = \sqrt{\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right)(L^2 + R^2)}$

Question 13: Compte tenu des paramètres de notre éolienne, déterminer la valeur de L pour laquelle l'expression de $V_D{}^{max}$ change.

Dans notre cas :

$$\dot{\theta}_{1/0} = k_1 = \omega_n = 30\ tr.min^{-1} = 0{,}1\frac{2\pi}{60} = 3{,}14\ rd.s^{-1}$$

$$\dot{\theta}_{2/1} = k_2 = \omega_p = 1\ tr.s^{-1} = 14\frac{2\pi}{60} = 6{,}28\ rd.s^{-1}$$

$$\frac{R}{L}\frac{k_2}{k_1} = \frac{10}{L}\frac{3{,}14}{6{,}28} = \frac{5}{L}$$

Donc :

$$L_{lim} = 5$$

Question 14: En déduire l'expression littérale et la valeur numérique de la longueur maximale L des pâles afin de respecter le cahier des charges.

$V_D{}^{max} = V_s = Rk_1 + L_{max}k_2$	$V_D{}^{max} = V_s = \sqrt{\left({k_1}^2 + {k_2}^2\right)\left({L_{max}}^2 + R^2\right)}$
$L_{max} = \frac{V_s - Rk_1}{k_2}$ $k_1 = 3{,}14\ rd.s^{-1}$ $k_2 = 6{,}28\ rd.s^{-1}$ $L_{max} = \frac{340 - 10 * 6{,}28}{3{,}14} = 88{,}2\ m$	${V_s}^2 = \left({k_1}^2 + {k_2}^2\right)\left({L_{max}}^2 + R^2\right)$ $L_{max} = \sqrt{\frac{{V_s}^2}{{k_1}^2 + {k_2}^2} - R^2}$ $L_{max} = \sqrt{\frac{340^2}{3{,}14^2 + 6{,}28^2} - 10^2} = 47{,}3\ m$
Incohérent car formule vraie que si $L_{max} < L_{lim}$	$\boldsymbol{L_{max} = 47{,}3\ m}$

On peut aussi tracer $V_D{}^{max}$ en fonction de L en utilisant les 2 formules… pour se persuader que ça marche. J'ai vérifié, on a bien les 2 vitesses égales à $L = L^{max}$

Question 15: Préciser la hauteur H minimale la nacelle doit elle se trouver pour respecter le cahier des charges.

$$H_{min} = L_{max} + h = 47 + 5 = 52\ m$$

Question 16: Déterminer l'expression littérale de l'accélération de l'extrémité D de la pâle $\vec{\Gamma}(D/0)$ en fonction de R, L, $\dot{\theta}_{1/0}$, $\dot{\theta}_{2/1}$, $\ddot{\theta}_{1/0}$, $\ddot{\theta}_{2/1}$ et des vecteurs de base.

$$\vec{\Gamma}(D/0) = \left.\frac{d\vec{V}(D/0)}{dt}\right)_0$$

$$\vec{\Gamma}(D/0) = \left.\frac{d\left(R\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} + L\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2} - L\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\overrightarrow{x_1}\right)}{dt}\right)_0$$

$$\vec{\Gamma}(D/0) = R\left.\frac{d\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 + L\left.\frac{d\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2}}{dt}\right)_0 - L\left.\frac{d\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0$$

$$\vec{\Gamma}(D/0) = R\dot{\theta}_{1/0}\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 + R\ddot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} + L\dot{\theta}_{2/1}\left.\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right)_0 - L\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2} + L\ddot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\overrightarrow{x_1}$$
$$+ L\dot{\theta}_{1/0}\dot{\theta}_{2/1}\sin\theta_{21}\overrightarrow{x_1} - L\dot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{y_1} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{x_1}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right)_0 = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_2} + \dot{\theta}_{1/0}\sin\theta_{2/1}\overrightarrow{x_2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}(D/0) = -R\dot{\theta}_{1/0}{}^2\overrightarrow{x_1} + R\ddot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} - L\dot{\theta}_{2/1}{}^2\overrightarrow{y_2} + L\dot{\theta}_{2/1}\dot{\theta}_{1/0}\sin\theta_{21}\overrightarrow{x_2} - L\ddot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2} + L\ddot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21}\overrightarrow{x_1}$$
$$+ L\dot{\theta}_{1/0}\dot{\theta}_{2/1}\sin\theta_{21}\overrightarrow{x_1} - L\dot{\theta}_{1/0}{}^2\cos\theta_{21}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}(D/0) = \left(L\ddot{\theta}_{1/0}\cos\theta_{21} - R\dot{\theta}_{1/0}{}^2 + 2L\dot{\theta}_{2/1}\dot{\theta}_{1/0}\sin\theta_{21}\right)\overrightarrow{x_1} + \left(R\ddot{\theta}_{1/0} - L\dot{\theta}_{1/0}{}^2\cos\theta_{21}\right)\overrightarrow{y_1}$$
$$- L\dot{\theta}_{2/1}{}^2\overrightarrow{y_2} - L\ddot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2}$$

Question 17: En déduire l'expression littérale de l'accélération du bout de pâle en supposant que les vitesses de rotation sont constantes en fonction de R, L, $\dot{\theta}_{1/0}$, $\dot{\theta}_{2/1}$ et θ_{21}.

$$\vec{\Gamma}(D/0) = \left(L\ddot{\theta}_{10}\cos\theta_{21} - R\dot{\theta}_{10}{}^2 + 2L\dot{\theta}_{21}\dot{\theta}_{10}\sin\theta_{21}\right)\overrightarrow{x_1} + \left(R\ddot{\theta}_{10} - L\dot{\theta}_{10}{}^2\cos\theta_{21}\right)\overrightarrow{y_1} - L\dot{\theta}_{21}{}^2\overrightarrow{y_2}$$
$$- L\ddot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2}$$

$$\vec{\Gamma}(D/0) = \left(-R\dot{\theta}_{10}{}^2 + 2L\dot{\theta}_{21}\dot{\theta}_{10}\sin\theta_{21}\right)\overrightarrow{x_1} + \left(-L\dot{\theta}_{10}{}^2\cos\theta_{21}\right)\overrightarrow{y_1} - L\dot{\theta}_{21}{}^2\overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{y_2} = \cos\theta_{21}\overrightarrow{y_1} + \sin\theta_{21}\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{\Gamma}(D,2/0) = \left(-R\dot{\theta}_{10}{}^2 + 2L\dot{\theta}_{21}\dot{\theta}_{10}\sin\theta_{21}\right)\overrightarrow{x_1} + \left(-L\dot{\theta}_{10}{}^2\cos\theta_{21}\right)\overrightarrow{y_1} - L\dot{\theta}_{21}{}^2\cos\theta_{21}\,\overrightarrow{y_1} - L\dot{\theta}_{21}{}^2\sin\theta_{21}\,\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{\Gamma}(D,2/0) = \dot{\theta}_{10}\left(2L\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21} - R\dot{\theta}_{10}\right)\overrightarrow{x_1} - L\cos\theta_{21}\left(\dot{\theta}_{10}{}^2 + \dot{\theta}_{21}{}^2\right)\overrightarrow{y_1} - \left(L\dot{\theta}_{21}{}^2\sin\theta_{21}\right)\overrightarrow{z_1}$$

$$\vec{\Gamma}(D,2/0) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{10}\left(2L\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21} - R\dot{\theta}_{10}\right) \\ -L\cos\theta_{21}\left(\dot{\theta}_{10}{}^2 + \dot{\theta}_{21}{}^2\right) \\ -L\dot{\theta}_{21}{}^2\sin\theta_{21} \end{pmatrix}^{\mathcal{B}_1}$$

$$\Gamma_D = \sqrt{\left(\dot{\theta}_{1/0}\left(2L\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21} - R\dot{\theta}_{1/0}\right)\right)^2 + \left(L\cos\theta_{21}\left(\dot{\theta}_{10}{}^2 + \dot{\theta}_{21}{}^2\right)\right)^2 + \left(-L\dot{\theta}_{21}{}^2\sin\theta_{21}\right)^2}$$

$$\Gamma_D = \sqrt{\dot{\theta}_{10}{}^2\left(2L\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21} - R\dot{\theta}_{10}\right)^2 + L^2\cos^2\theta_{21}\left(\dot{\theta}_{10}{}^2 + \dot{\theta}_{21}{}^2\right)^2 + L^2\dot{\theta}_{21}{}^4\sin^2\theta_{21}}$$

$$\Gamma_D{}^2 = 4L^2\dot{\theta}_{21}{}^2\dot{\theta}_{10}{}^2\sin^2\theta_{21} - 4L\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21}\,R\dot{\theta}_{10}{}^3 + R^2\dot{\theta}_{10}{}^4 + \dot{\theta}_{10}{}^4L^2\cos^2\theta_{21} + L^2\cos^2\theta_{21}\,2\dot{\theta}_{10}{}^2\dot{\theta}_{21}{}^2 + L^2\cos^2\theta_{21}\,\dot{\theta}_{21}{}^4 + L^2\dot{\theta}_{21}{}^4\sin^2\theta_{21}$$

$$\Gamma_D{}^2 = 2L^2\dot{\theta}_{10}{}^2\dot{\theta}_{21}{}^2\left(1 + \sin^2\theta_{21}\right) - 4LR\dot{\theta}_{10}{}^3\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21} + \dot{\theta}_{10}{}^4\left(R^2 + L^2\cos^2\theta_{21}\right) + L^2\dot{\theta}_{21}{}^4$$

$$\Gamma_D = \sqrt{2L^2\dot{\theta}_{10}{}^2\dot{\theta}_{21}{}^2\left(1 + \sin^2\theta_{21}\right) - 4LR\dot{\theta}_{10}{}^3\dot{\theta}_{21}\sin\theta_{21} + \dot{\theta}_{10}{}^4\left(R^2 + L^2\cos^2\theta_{21}\right) + L^2\dot{\theta}_{21}{}^4}$$